

חשבון דיפרנציאלי וrintegrali 2

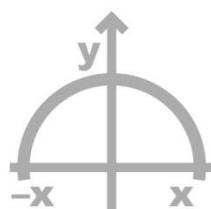


$$\begin{matrix} & \sqrt{2} \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{matrix}$$
A square divided into four triangles by diagonal lines, with the top-right triangle shaded.



$$\begin{matrix} + & - & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix}$$
A coordinate system with a point at the origin labeled '0'.

$$\left\{\sqrt{x}\right\}^2$$
A large bracketed expression: $\left\{\sqrt{x}\right\}^2$.



תוכן העניינים

1.	1. אינטגרלים מיידיים
6.	2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
8.	3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת
12.	4. אינטגרלים בשיטת ההצבה
15.	5. אינטגרלים של פונקציות רצינוליות
20.	6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
31.	7. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו
43.	8. שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)
65.	9. שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)-שטח מעטפת)
70.	10. המשפט היסודי של החדו"א, משפט הערך הממוצע לאינטגרלים
73.	11. אינטגרלים לא אמתיים
84.	12. קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים למרחב
111.	13. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
119.	14. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
126.	15. נגורות חלקיות
134.	16. כלל שרשרת בפונקציות של מספר משתנים
138.	17. פונקציות הומוגניות-משפט אוילר
145.	18. קיצון ואוקף לפונקציה של שני משתנים
147.	19. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים
149.	20. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
152.	21. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
154.	22. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1	1. אינטגרלים מיידיים
4	2. מציאת פונקציה קדומה

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל : $(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c)$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל : $(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c)$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל : $(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c)$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 29)}$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 30)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיעור המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 6x + 6$.

שיעור הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 ,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

שיעור המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

- 8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$,
 ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$
- מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 - חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 - תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $'(G(x) - f(x))$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8) ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

ה. 0 ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....
6

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad \text{(3)}$$

$$\ln|\sin x| + c \quad \text{(2)}$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad \text{(1)}$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad \text{(6)}$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad \text{(5)}$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad \text{(4)}$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad \text{(9)}$$

$$e^{\tan x} + c \quad \text{(8)}$$

$$e^{x^2} + c \quad \text{(7)}$$

$$\sin(\ln x) + c \quad \text{(12)}$$

$$\sin(\sin x) + c \quad \text{(11)}$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad \text{(10)}$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad \text{(15)}$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad \text{(14)}$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad \text{(13)}$$

$$\frac{1}{2}(\tan x)^2 + c \quad \text{(18)}$$

$$\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c \quad \text{(17)}$$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad \text{(16)}$$

$$\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(21)}$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad \text{(20)}$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad \text{(19)}$$

$$\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(24)}$$

$$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(23)}$$

$$\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{(22)}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
- 8.....

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

12

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4}\right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רצינוליות

תוכן העניינים

15	1. אינטגרלים של פונקציה רצינולית
17	2. חילוק פולינומיים ואינטגרלים של פונקציה רצינולית
18	3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רצינולית

אינטגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2 - 2x + 1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2 + 5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4 - 13x^2 + 36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2 + 4x - 6}{x^3 - 7x - 6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3 + x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x + 36}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)(x - 3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2 + 4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומיים וaintגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שימושיים הצבה ופונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x^2} \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1+\sqrt[6]{x})}{2} + 3(1+\sqrt[6]{x}) - \ln |1+\sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1+\sqrt[4]{x-1}) - \ln |1+\sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1+e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא	(לא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות	20
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות.....	22
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית.....	23
5. הצבות טריגונומטריות שმטרתן להיפטר משורשים.....	24
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות.....	27

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	זכור כי :
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$	
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$	

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(2) $\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$

(1) $\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$

(4) $\int \sin^3 2x dx$

(3) $\int \cos^3 x dx$

(6) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

(5) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(8) $\int \tan^5 x dx$

(7) $\int \cos^5 x dx$

(10) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(12) $\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$

(11) $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

תשובות סופיות

(2) $\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c$

(1) $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c$

(4) $-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c$

(3) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

(6) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

(5) $\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$

(8) $\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c$

(7) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

(10) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$

(9) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$

(12) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$

(11) $-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמשתרתן להיפטר משורשים

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתרו את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רצינליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \left(\arcsin\frac{x}{2} \right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} + c \quad (10)$$

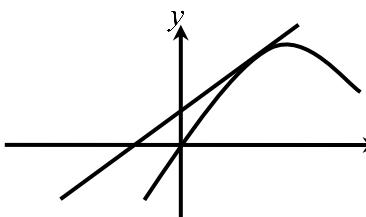
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתוחום שבין ראשית הצירים لنקודת המקסימום הראשונה
מיינינה העבירו לפונקציה משיק ששיופעו 1.



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק וציר ה- x , בריבוע הראשון והשני.

2) באIOR שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתוחום $\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,
ונעליה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גраф הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנตอน,

המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO. המשטח הכלוא בין גראף הפונקציה והציר יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גראף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

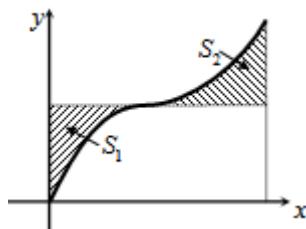
3) באIOR שלහן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

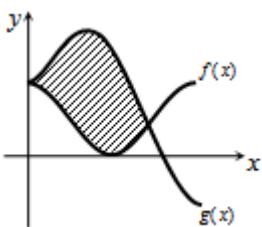
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנตอน? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגראף הפונקציה לציר ה- x בנקודת שבה $x = 2\pi$,

ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

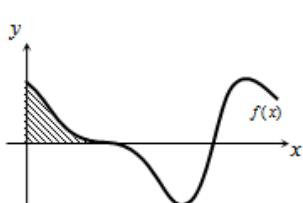
הראו כי השטחים המסומנים בشرطוט, S_1 ו- S_2 , שוויים.





4) באIOR שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- השתמשו בזיהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



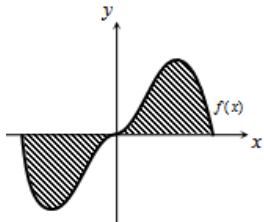
5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.

- מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיים $f'(x) = 0$, בתחום $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קייזון, נמצאת על ציר ה- x .

- מצאו את הפונקציה $f(x)$.

6) באIOR שלහלן מתואר גраф הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

- הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$, $f(x) = x^2 \sin x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

ב. הראו כי גраф הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

ב. π ייח"ש. א. $y = x + 2$ (1)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב. } y = 1 \quad \text{א. } (1)$$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

$$S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934 \quad \text{ב. } S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299 \quad \text{ב. } (0,1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{א. } (3)$$

$$\text{ג. } f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א. } (4)$$

. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ ב. שאלת הוכחה. א. שאלת הוכחה. (5)

$$b = -2, a = 2 \quad (6)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \end{cases}$$

חשבון דיפרנציאלי וaintגרלי 2

פרק 7 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א	31
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים	37
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות	40

הaintgral המסויים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10) הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx . \text{ ב.}$$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx . \text{ ב.}$$

12) תהיו $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx . \text{ חשבו :}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx . \text{ חשבו :}$$

16) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx . \text{ א. אם } f \text{ זוגית, אז}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 . \text{ ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אז}$$

чисבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) dx \quad \text{чисבו את האינטגרל}$$

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } (n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx$$

21) (ازהרה לגבי שיטת הצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, בעזרת הצבה $t = \frac{1}{x}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ יישירות.

ג. בסעיפים א' וב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$\cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx \quad (22)$$

23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת הצבה $x = \tan t$ חשבו את האינטגרל $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכנון

החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$

עם הכנון החיובי של ציר x .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

26) הוכחו:

אם f פונקציה רציפה ומוחזרת על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

27) הוכחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

$$-6 \quad \text{(1)}$$

$$\ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{(2)}$$

$$-2e^{-1} + 1 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{(4)}$$

$$\arctan 6 - \arctan 3 \quad \text{(5)}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{17}{12} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5}) \quad \text{(8)}$$

$$\frac{17}{6} \quad \text{(9)}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

$$x = e^2 \quad \text{(12)}$$

$$0 \quad \text{(13)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(14)}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \quad \text{(15)}$$

(16) שאלת הוכחה.

$$0 \quad \text{(17)}$$

$$2\arctan 4 \quad \text{(18)}$$

$$0 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ א, ב, ג.} \quad \text{(20)}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ ב.} \quad 0 \text{ א.} \quad \text{(21)}$$

(22) שאלת הוכחה.

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ב.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C \text{ א.} \quad \text{(23)}$$

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad \text{(24)}$$

$$1 - \sqrt{3} \quad \text{(25)}$$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

1) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $M \geq f(x) \geq m$ לכל x בקטע $[a,b]$.

$$\text{הוכיחו כי } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(12) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$ לכל $x \in [0,1]$. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

(13) תהי $f : [0,a] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0,a]$. הוכיחו כי $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$. תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $0 = g(a) = g(b)$. הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$. הוכיחו שקיים $x_0 \in [a,b]$, עבورو $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$. הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$.

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2} \text{ אז } f(a)=0 \text{ וכן } f'(x) \leq M \text{ וגם}$$

(19) יהיו $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c \in [a,b]$ כך שה-

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הaintegral המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חסבו : } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שמלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן) :

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = 0.5n(n+1)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

תוכלו להיעזר בזיהויות הבאות :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2 dx$

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

רמז : השתמשו בחלוקת הבאה של הקטע
 $P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad \text{(1)}$$

$$1 - \cos 1 \quad \text{(2)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(4)}$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{(5)}$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad \text{(6)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(7)}$$

$$-1 \quad \text{(8)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{(10)}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{(11)}$$

$$2 \quad \text{(12)}$$

$$21 \quad \text{(13)}$$

$$0.5 \quad \text{(14)}$$

חשבון דיפרנציאלי וaintegral 2

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)

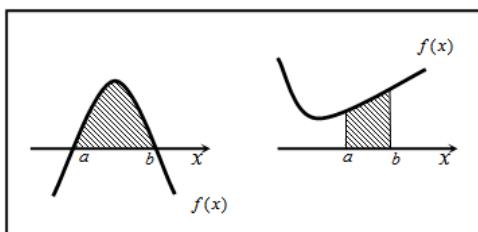
תוכן העניינים

43	1. חישוב שטחים
63	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה- y
64	3. אורך קשת

чисוב שטחים

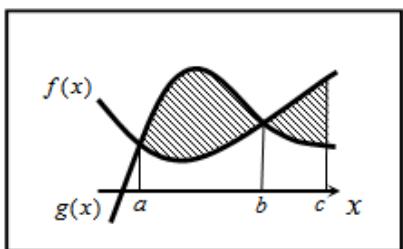
чисוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



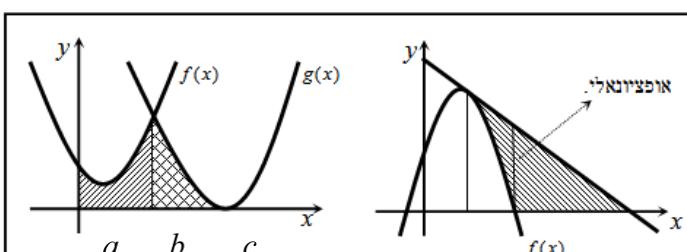
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

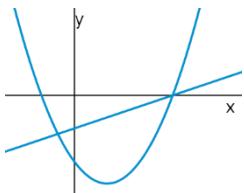


$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

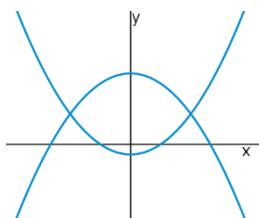
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



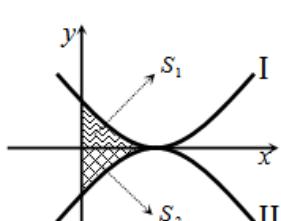
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

שאלות

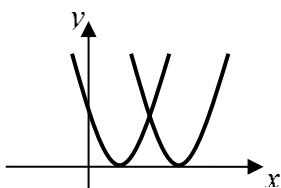
- 1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



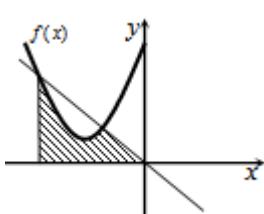
- 2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



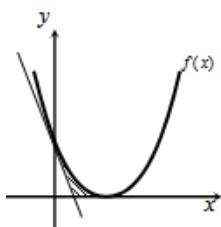
- 3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמפורט באירור.
 א. התאימו בין הפונקציות לgrafים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמפורט באירור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



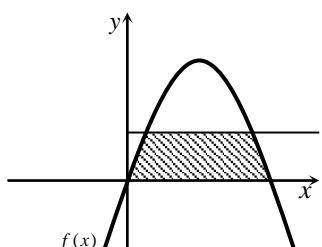
- 4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



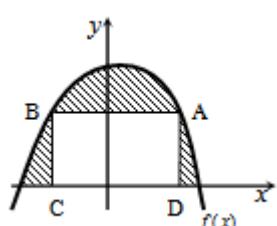
- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודת שבה $x = -4$, כמפורט באירור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



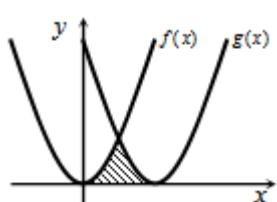
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



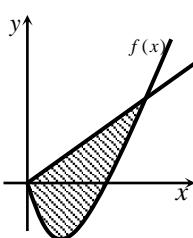
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $9 = x$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיוור שלහלן, היא $y = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $6 = f(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .
 מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$.
 ידוע שהשעור ה- x של הנקודה A הוא $4 = x$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).

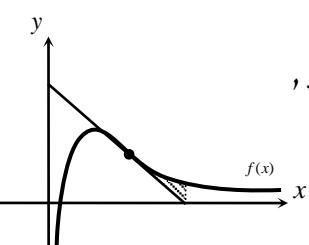


- 9) באיוור שלහלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודת שבה $x = 2$.
 הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

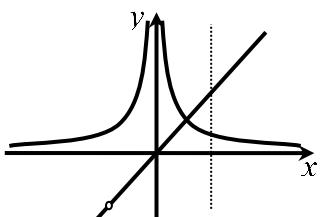


- . 10) באյור שלහלן מתוארים גראף הפונקציה $f(x)$ והישר x . $y = 2x$ נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$, וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16. א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

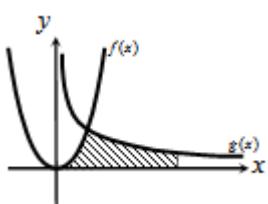
- ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה והישר.



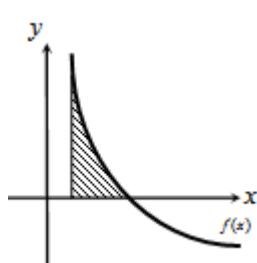
- 11) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ מצאו את משוואת המשיק ששיעורו מינימלי.
ב. באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה, המשיק, ואנד לציר ה- x , היוצא מנקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



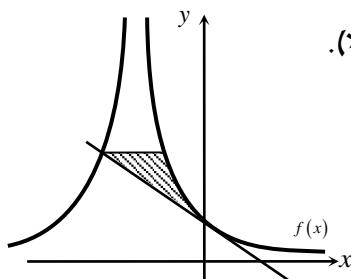
- 12) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=2$ וציר ה- x .



- 13) באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x > 0$. ידוע כי הגרפים נחתכים ברגע הראשון, בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $y = 4x$.



- 14) גראף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=2$.



15) נתונה הפונקציה A) $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ פרמטר חיובי.

ידעו כי שיפוע הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

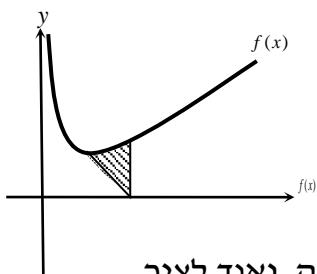
א. מצאו את ערך הפרמטר A .

ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- y .

ג. הראו כי המשיק חותך את גраф הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודות החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודות החיתוך הנוספת של ישר זה עם גраф הפונקציה.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיוור).

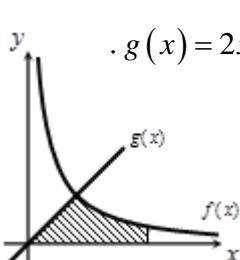


16) באיוור שלහן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

א. מצאו את נקודות המינימום שלה.

ב. מנקודות המינימום של הפונקציה נعبر ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מנקודה $(2,0)$ עד לנקודות החיתוך עם גרף הפונקציה.



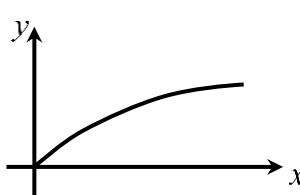
17) באיוור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x) = 2x$ ו- $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגрафים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגראפים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

18) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודות המינימום שלה וציר ה- y .



19) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ בריבוע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר $\sqrt{3} = x$.

20) באյור שלහן מתואר גраф הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

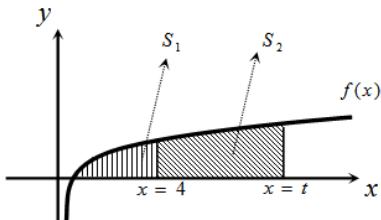
נעביר שני אנקים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,

ואת השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x והאנקים ב- S_2 .

ידעו כי $S_2 = 8S_1$.

מצאו את t .



21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$

א. ענו על השעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה שיפועו הוא $\frac{17}{16} m$.

מצאו את נקודת ההשכה.

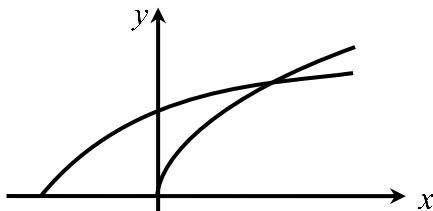
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשכה שמצויה בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ציר ה- x הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .



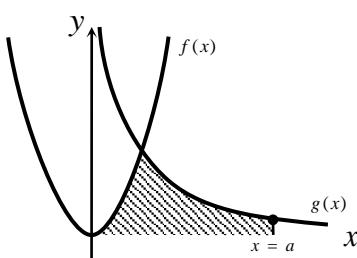
23) באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

בריבוע הראשון.

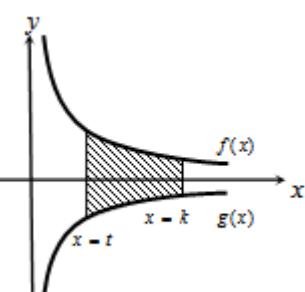
נעביר ישר $x = a$, החותך את גраф הפונקציה $g(x)$ ויצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידעו כי שטח זה שווה ל- $S = \frac{1}{3} 85$.

מצאו את a .



24) באIOR שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות

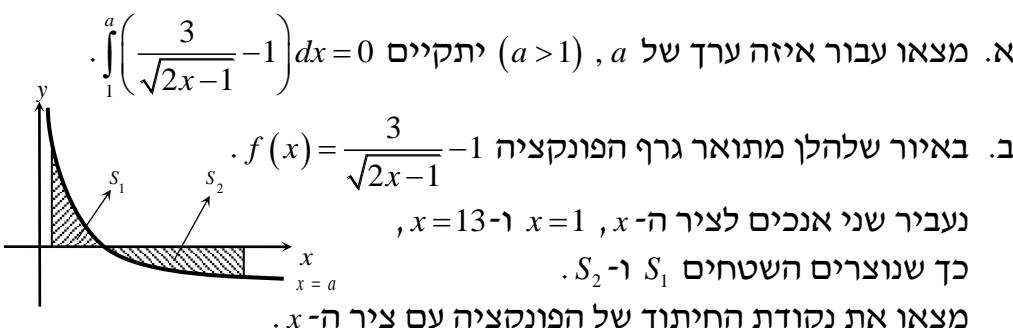


ונוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x = t$ ו- $x = k$ הוא $S = 12$. מצאו את t .

25) ענו על הטעיפים הבאים:



א. מצאו עבור איזה ערך של a יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.

ב. באIOR שלහן מתואר גוף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$, $x = 1$ ו- $x = 13$. נקבע שני אנכים לציר ה- x , אחד בנקודה $x = a$ ו- S_2 ו- S_1 . מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

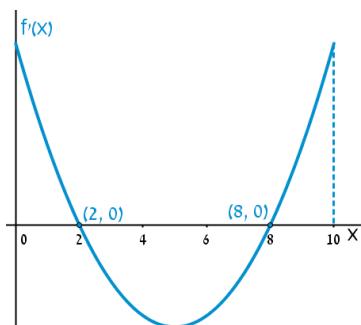
ג. ענו על תתי-הטעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גוף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כולם את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו כמה שווה השטח S_2 .

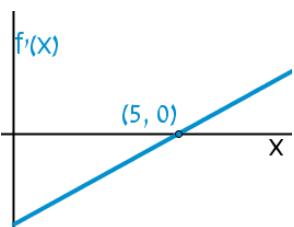
נקו.



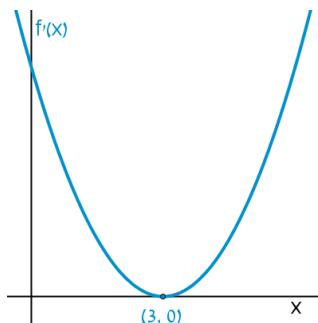
26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$ בציור מתואר גוף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גוף הפונקציה $f(x)$, $f(5) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 6$ ו- $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גוף הנגזרת והצירים בריבוע הראשון, עד לנקודת שבה $x = 2$.

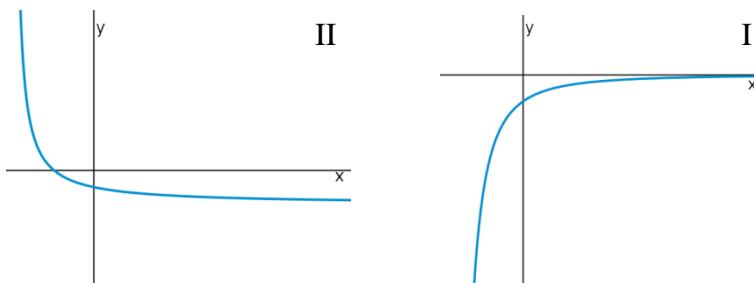


- 27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.
- מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.
 - קבעו מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלו הוא -2 .
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



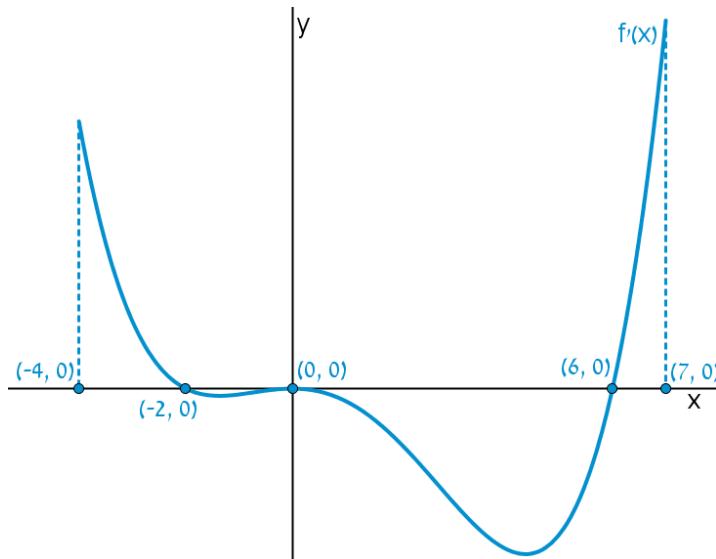
- 28) באIOR שלහלן מתוארכות הנגזרת $f'(x)$.
- האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בריבוע הראשון.

29) באIORים שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



- א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.
 ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f'(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$

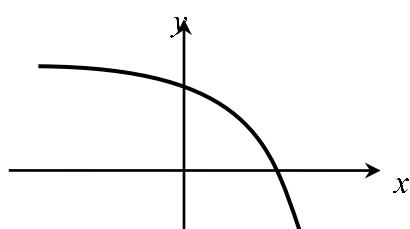


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(-2) = -2$, $f(0) = 7.6$, $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע השלישי.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

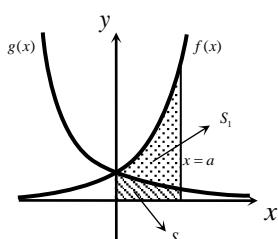
אינטגרלים יסודים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



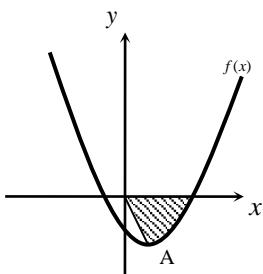
31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיופעו $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $0 > b$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
 וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

33) נתונות הפונקציות $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ו- $g(x) = e^{-x}$.
 מנוקודה הנמצאת על גרף הפונקציה (x, g) בربיע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
 ומנקודות החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



34) באIOR שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $a = x$,
 כאשר $0 > a$, כמתואר באIOR.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



$$35) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2.$$

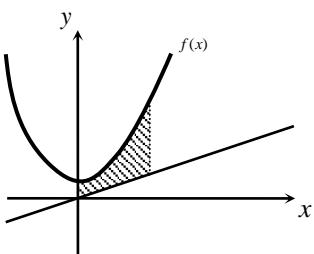
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A .

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את המשוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הרأسית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.



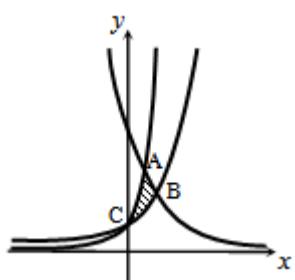
$$36) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$$

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באյור שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.



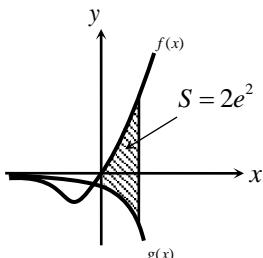
37) באյור שלහן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x}, \quad g(x) = 4^x, \quad f(x) = 2^x \cdot 3$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B , C (נקודות החיתוך בין הגрафים).

ג. חשבו את השטח המסומן באյור.



38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x$ ו- $g(x) = -e^x$.

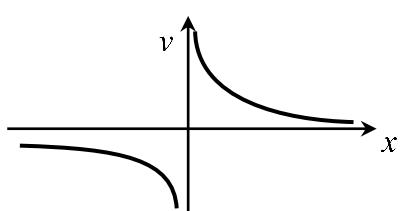
נעביר ישר $y = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקומו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
מצאו את a .

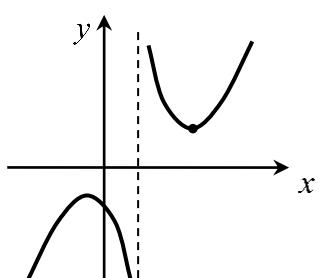
פונקציות לוגרิตמיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריטמיות

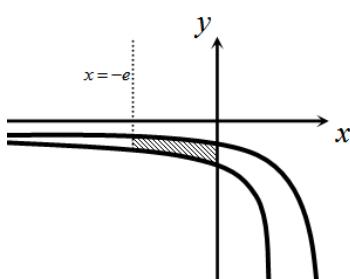
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



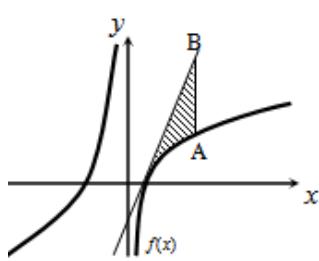
39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -4$ ו- $x = -1$, וציר ה- x .
 ניתן להשאיר \ln בתשובה.



40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה.
 אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



41) באIOR שלහן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$ ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.
 ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודת שבה $x = 3$.
 א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



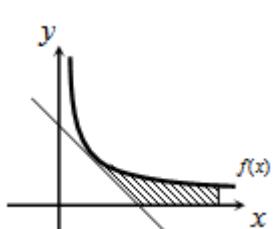
42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משווהת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משווהת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודה החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



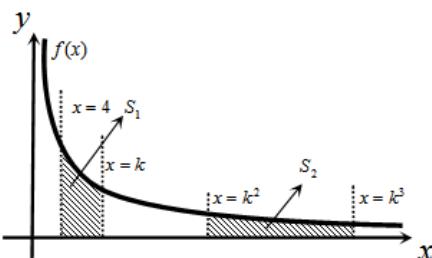
43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבת $x = 2$ היא $y = 4 - x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באյור שלහלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.

חסבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



44) באյור שלහלן נתונה הפונקציה

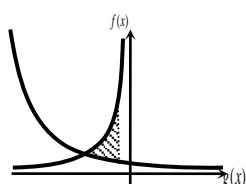
$$f(x) = \frac{2}{x}, \text{ בתחום } x > 0.$$

נעביר את הישירים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$, כמתואר באյור ($x > 4$).

א. הבינו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחסבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 .
מצאו את k .

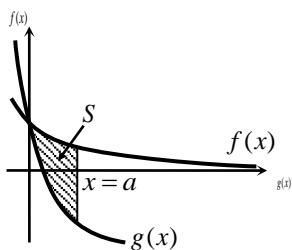


45) נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ ו- $f(x) = -\frac{4}{x}$

גרף $(x) g$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבת 4.
א. מצאו את הפונקציה $(x) g$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x}) \quad f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

בתחום $0 \geq x$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נعتبر ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

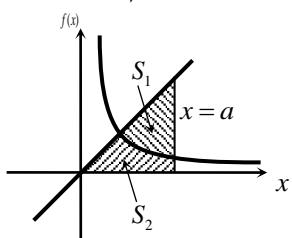
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הfonקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $x = a$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, בربיע הראשון.



נعتبر א נקודה לציר ה- x , $x = a$, הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצויה בסעיף הקודם.

הנקה חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 , המתוארים באյור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

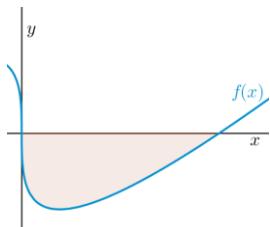
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} + C$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m+1}{n}}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + C$

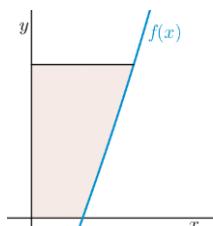
תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



. 48) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והציר.



. 49) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

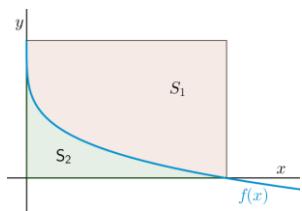
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. נעביר אנך לציר ה- y מנקודה (4,6).

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והציר,

בריבוע הראשון.

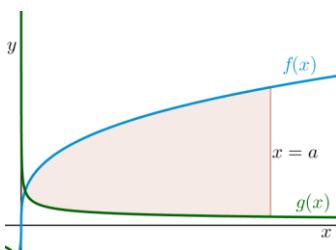


. 50) באIOR שלහלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$

נעביר אנכים לצירים מנוקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבו,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והציר ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והציר ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ו- } f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

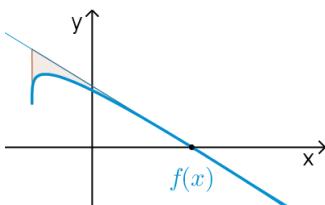
בתוחם $0 < x$.

ב. נعتبر אנך לציר ה- x , $x = a$ (a פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנוקדת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42 \frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, a פרמטר.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

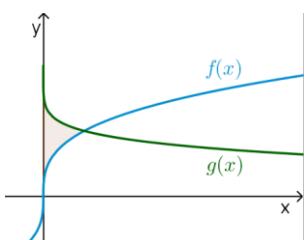
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באյור שלහלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

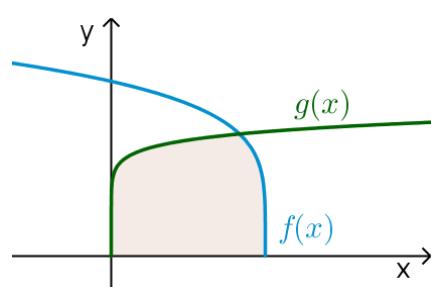


53) באյור שלහלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$\cdot f(x) = 2 - \sqrt[6]{x} \text{ ו- } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

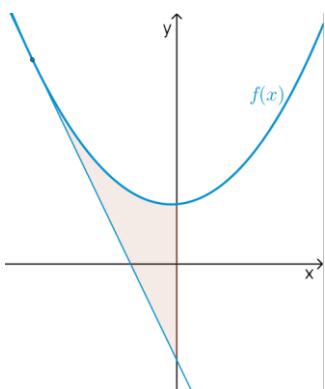


54) הנזורה של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

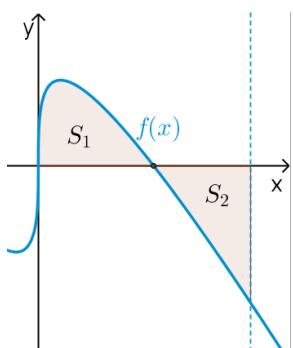
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



- 55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.
 א. מצאו את משועצת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גורף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



- 56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. באIOR שלහן מתוארך גורף הפונקציה בריבוע הראשון. השטח הכלוא בין גורף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
 נعتبر ישר $k = x$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באIOR.
 מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

.ג. $57\frac{1}{6}$ יחס'ש. (1)

.ב. $21\frac{1}{3}$ יחס'ש. (2)

.ב. שאלת הוכחה. $g(x) = \Pi, f(x) = I$. א. (3)

.ב. $\frac{2}{3}$ יחס'ש. (4)

.ג. $7\frac{5}{6}$ יחס'ש. ב. $(-3,3)$ ב. $y = -x$. א. (5)

.ג. $\frac{2}{3}$ יחס'ש. ב. $(1,0)$ ב. $y = -4x + 4$. א. (6)

.ג. $81\frac{1}{3}$ יחס'ש. ב. $(1,9)$ ב. $k = 10$. א. (7)

.ב. $27\frac{1}{6}$ יחס'ש. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$. א. (8)

.ב. $5\frac{1}{3}$ יחס'ש. $g(x) = (x-4)^2$. א. (9)

.ג. $85\frac{1}{3}$ יחס'ש. ב. $(0,0)$ ב. $f(x) = x^2 - 6x$. א. (10)

.ב. $\frac{1}{8}$ יחס'ש. $y = -x + 2$. א. (11)

.ב. 1 יחס'ש. (12)

.ב. $13\frac{1}{3}$ יחס'ש. $(2,8), a = 32$. א. (13)

.ב. 8 יחס'ש. $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}, a = 36$. א. (14)

.ה. $\frac{5}{8}$.ג. $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$.ד. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$.ב. $A = 6$. א. (15)

.ב. 1.75 יחס'ש. $\min(0.5, 1.5)$. א. (16)

.ב. 48 יחס'ש. $(4, 8)$. א. (17)

.ב. 2.26 יחס'ש. (18)

.ב. 0.5 יחס'ש. (19)

$t = 16$ (20)

.ג. 88 יחס'ש. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$.iii $(4, 0)$.ii $x > 0$.i. א. (21)

$b = 2$ (22)

$a = 9$ (23)

(24) א. שאלת הוכחה. $t=1$

$$\cdot S_2 = |-S_1| = 2 \cdot ii \quad S_1 = 2 \cdot g.i. \quad (5,0) \quad a = 13 \quad (25)$$

(26) ב. 10 יחס'.

(27) א. חיובית: $x < 5$, שלילית: $x > 5$. ב. עולה: $x < 5$, יורדת: $x > 5$.

ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יחס'.

$\min(5, -2)$

(28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. שאלת הוכחה.

ג. 1 יחס'.

f(x): II, f'(x): I (29)

ג. 604.8 יחס'.

(30) א. שאלת הוכחה.

ב. 9.6 יחס'.

S = 0.192 (31)

b = 2 (32)

(33) שאלת הוכחה.

a = ln 2 (34)

ג. S = 4.744 יחס'.

ב. 1.52 $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$, a = -2 . א (36)

ג. S = 1.03 A(1,4), B(1 $\frac{1}{3}$, 2.52), C(0,1) ב (37)

a = 2 ב. $y' = xe^x$. נ (38)

. ש. S = ln 4 (39)

. ש. S = 4 ln 2 - 2 (40)

ב. S = 1.76 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, g(x) = $\frac{1}{x-2}$, a = 2 . נ (41)

ב. $x = 2$ $f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}$, a = 2 , b = -4 . נ (42)

ג. S = 6 + ln 256 ≈ 11.54 יחס'.

ב. S = 6 - 4 ln 2 $f(x) = \frac{4}{x}$. נ (43)

א. k = 8 . ג. $S_2 - S_1 = \ln 16$ ב. $S_1 = 2 \ln k - \ln 16$, $S_2 = 2 \ln k$. נ (44)

ג. $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$ ב. (-2, 2) $g(x) = \frac{2}{2x+5}$. נ (45)

ב. a = 2 (46)

$\frac{S_1}{S_2} = 5.955$ ג. a = 5 ב. (1,1) . נ (47)

ב. S = 16 יחס'.

(0,0), (8,0) . א (48)

ג. S = 18.149 ב. (2,0) $x > 0$. נ (49)

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a=8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2 \right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ט.}$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad (1,1) \quad \text{א.} \quad (53)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296... \quad \text{ג.} \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad .x \quad \text{א. כל} \quad (56)$$

чисוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $x = 8 - y$.

תשובות סופיות

$$20\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$20\frac{5}{6} \quad (2)$$

אורקשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

$$(1 \leq x \leq 8), \quad y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), \quad x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \left\{ 82^{1.5} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

חשבון דיפרנציאלי וaintegral 2

פרק 9 - שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)-שטח מעטפת

תוכן העניינים

65	1. חישוב נפח גוף-סיבוב.....
68	2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב.....
69	3. חישוב נפח גוף כללי.....

חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- x .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

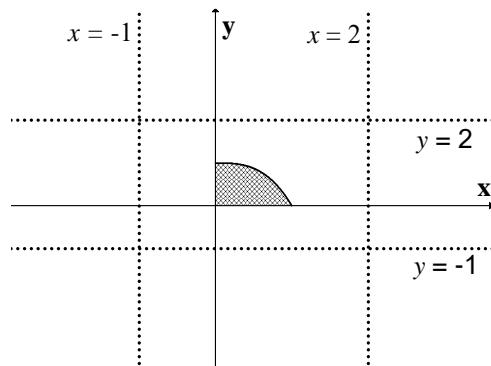
- א. שיטת הדיסקיות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- y .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

- א. שיטת הדיסקיות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר קלשחו.
מצאו את נפח הגוף המתתקבל בכלל מקרה בשאלות 3-8:



3) ציר ה- x .

4) הישר $y = -1$.

5) הישר $y = 2$.

6) ציר ה- y .

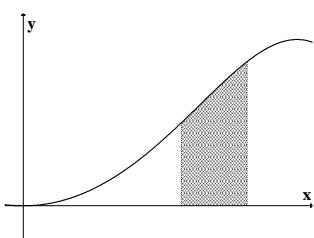
7) הישר $x = -1$.

8) הישר $x = 2$.

9) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

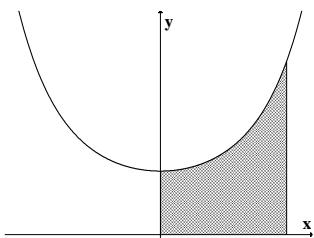
10) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

11) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



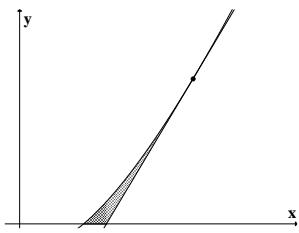
12) השטח הכלוא בין גраф הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$
 מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו נפח הגוף המתתקבל?



13) השטח הכלוא בין גраф הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 מהו נפח הגוף המתתקבל?



14) השטח הכלוא בין גראף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x .
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 מהו נפח הגוף המתתקבל?

15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח הגוף הסיבוב שמתתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב. } \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב. } \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$\frac{9\pi}{14} \mathbf{(3)}$$

$$\frac{15\pi}{7} \mathbf{(4)}$$

$$\frac{33\pi}{14} \mathbf{(5)}$$

$$\frac{3\pi}{5} \mathbf{(6)}$$

$$2.1\pi \mathbf{(7)}$$

$$\frac{12\pi}{5} \mathbf{(8)}$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \mathbf{(9)}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \mathbf{(10)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{(11)}$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \mathbf{(12)}$$

$$\pi(e-1) \mathbf{(13)}$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \mathbf{(14)}$$

$$128\pi \mathbf{(15)}$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

1) הפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x = \sqrt{9 - y^2}$, עבור $-3 \leq y \leq 3$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

$$8\pi \quad (1)$$

$$S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2} \quad (2)$$

$$S = 4\pi R^2 \quad (3)$$

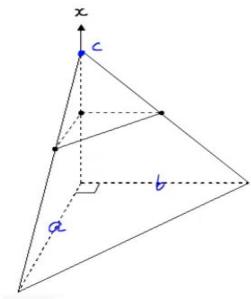
$$24\pi \quad (4)$$

чисוב נפח גוף כללי

שאלות

1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .

2) חשבו את נפח של פירמידה, שבבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).



תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 10 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב.....
70

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם f רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אז:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^{x^2} e^{2t^2} dt}$$

11) חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$, כאשר $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$.
חשבו את $(g''(x))$ (הוכיחו כי f רציפה).

13) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$
הוכיחו כי $(g'(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha \neq 0$.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$
הוכיחו כי $(f''(x)) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$

15) תהי f פונקציה רציפה וחיוונית לכל $x \geq 0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \infty)$.

16) מצאו את $\int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt = \int_2^x f(t) dt + 2 \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$, אם נתנו כי $\int_e^4 f(x) dx$

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודת 2π

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחומי הגדרה : כל x .

נקודות קיצון : אין קיצון, עולה לכל x .

$$\text{נקודות פיתול : } x = -1, 1, -\frac{3}{7}$$

. $-1 < x < -\frac{3}{7}$, $x > 1$ תחומי קמירות :

. $x < -1$, $-\frac{3}{7} < x < 1$ תחומי עיריות :

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 11 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון	73
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני	75
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי	76
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים	77
5. מבחני השוואה	78
6. הטענות בהחלה	80
7. מבחון דיריכלה	81
8. הטענות בתנאי	82

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

6) הוכחו כי $\left| \alpha \right| < 1$, $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

7) הוכחו כי $\left| \alpha \right| > 1$, $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר : ∞ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

- (1) מתבדר : ∞ .
- (2) מתבדר : ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר : ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x עבור $1 \leq x$.

2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.
 ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$.
 מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- 1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתבדר.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

התכנסות בהחלה

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

4) הוכיחו : אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, אז $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ א. } (1)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ א. } (2)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx . \text{ א. } (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx . \text{ ב.}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx . \text{ ג.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx . \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 12 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור.....	84
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית.....	88
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קווטבית (פולרית).....	94
4. משטחים במרחב.....	99
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית	(לא ספר) 101
6. גופים במרחב.....	104
7. קוואורדינטות גליליות וכדוריות.....	108
8. נספח – משטחים מעלה שנייה.....	

קוויים ותחומיים במישור

שאלות

(1) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

(2) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

(3) מצאו את המר策 והרדיזוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חlek מעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

A. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

B. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

C. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

B. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$

C. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$

D. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$

E. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

F. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

G. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

H. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

B. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

C. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0\}$

D. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

B. $S = \{(x, y) | 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחוםים הבאים במישור:

A. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

B. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

C. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

D. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

E. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

F. $S = \left\{ (x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2} \right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- A. הוכחו שהמשוואה מוגדרת אליפסה ושרטטו אותה.
- B. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי העליון ואת החצאי התחתון של האליפסה.
- C. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי הימני ואת החצאי השמאלי של האליפסה.
- D. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
- E. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחוםים הבאים במישור:

A. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

B. $S = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \right\}$

C. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2} \right\}$

D. $S = \left\{ (x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2 \right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) | -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) | y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קוויים ותחומיים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0$ $x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi$ $x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi$ $x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה שmbטאת כל מסלול
באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (קבוע).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה A(2,2) לנקודה B(-2,-2).

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

4) נתונים שני מעגלים $x^2 + y^2 = 25$ ו- $(y-4)^2 + (x-8)^2 = 25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתוחם הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך y הגדול יותר.

מצאו את הצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתוחם החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצוגן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות. מצאו את הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התוחם, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרbole $4x^2 - y^2 = 4$.

א. ההיפרbole מורכבת משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציינו באופן פרמטרי את התוחם המוגבל בין היפרbole לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2 - y^2 = 3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף אי' מורכב משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנutan מהנקודה $(-3, -2)$ לנקודה $(0, -1)$.

כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$. $0 \leq t \leq 2\pi$

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$. $-\pi \leq t \leq 2\pi$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 . \quad \text{ב.} \quad y = x - 1, x \geq 1 . \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 . \quad \text{ג.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} . \quad \text{ג.} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 . \quad \text{ב.} \quad y = (x+4)^2 . \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 . \quad \text{ו.} \quad x^2 + y^2 = 25 . \quad \text{ז.} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 . \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v & 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = u \cos v & \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} . \quad \text{ט.}$$

א. המעלג $x^2 + y^2 = 25$: מרכז $(0,0)$. רדיוס : 5.

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

המעלג $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 25$: מרכז $(8,4)$. רדיוס : 5.

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

$$\text{ב. מקרה 1: } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2: } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\{(x, y) | -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - (y-4)^2} + 8\} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) . \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t & \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y(t) = 2 \sin t & \end{cases} : DA$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t & \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \\ y(t) = 2 \sin t & \end{cases} : BC$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t & \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t & \end{cases} : AB$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t & \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t & \end{cases} : CD$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \end{cases}$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \end{cases} . \text{ט}$$

6) א. אלגברית: ימנית שמאלית $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$

פרמטרית: ימנית, שמאלית $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

. $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$ א. הiperבולת. ב. אלגברית: ימנית שמאלית

פרמטרית: ענף ימני וענף שמאלי $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. ט $C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$

8 (8)

 $6\pi\sqrt{29}$ (9)

קוויים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-4, 0)$ לנקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $x^2 - 4x - xy = 1$ לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

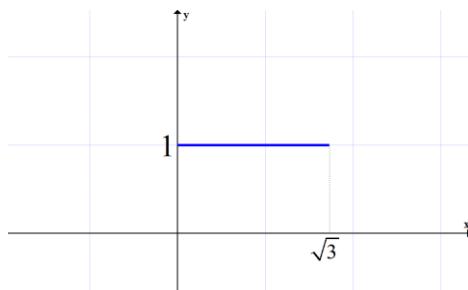
- א. המירו את המשוואה $y^2 + x^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה $10 = x$ לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה $4 = y$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

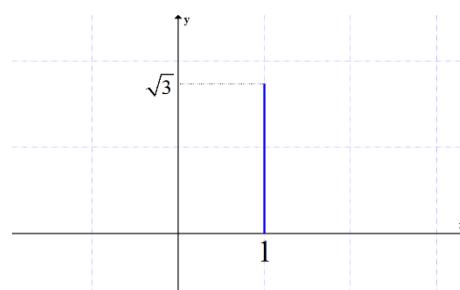
- א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = 4/\pi$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שיכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקוים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים שכל אחד מהקוים מתאר חלק מעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכחו שככל אחד מהקוים מתאר חלק מעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מותאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

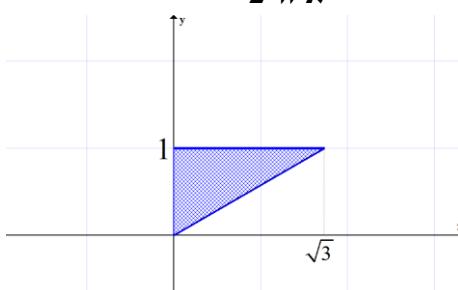
ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

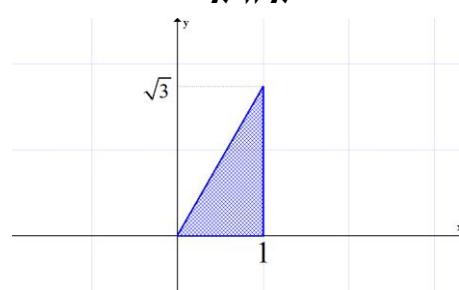
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2} \right\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
 כתבו כל אחד מתחוםים בהצגה פולרית ותארו במלילים כל אחד מתחומיהם.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ נ. } \text{ (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ נ. } \text{ (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ נ. } \text{ (5)}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } \quad r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ נ. } \text{ (6)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (7)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ט}$$

$$r = 6 \sin \theta, \quad 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב.} \quad r = 4 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ נ. } \text{ (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ט.} \quad \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ט}$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \text{ נ. (11)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \text{arctan} \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (12)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad \text{ב} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad \text{ג} \quad (14)$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו וشرطו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

4) זהו וشرطו את המשטחים הבאים :

א. $z = 4x^2 + y^2 + 1$

ב. $z = 3 - x^2 - y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

א. $25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100$

ב. $25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0$

ג. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $0 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206$.
א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ו- $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$.
א. זהו את המשטח וشرطו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור,
ושנמצאים כולם על המשטח.

- . $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$
- 10)** נתונים שני משטחים: א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 ב. הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלתה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .
- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- 1)** אליפסואיד.
2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
3) היפרבולואיד חד-יריעתי.
4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
5) א. אליפסואיד.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
7) א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדiosa $\sqrt{14}$.
 נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי.
 ב. $z = -x, z = x$
 ג. $\sqrt{2} \cdot \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$.
 $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במיללים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במיללים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

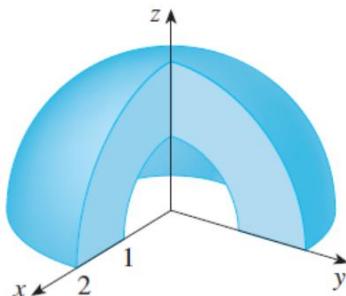
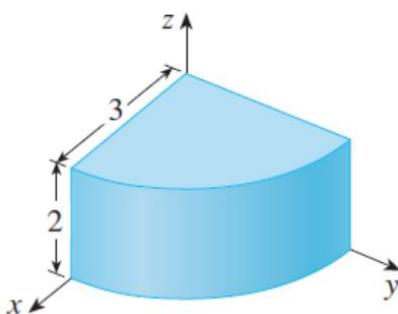
ה. $U = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים אירור של גוף V במרחב.

תארו במיללים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית {} |

ב.

א.



7) נתונים המשטחים $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים שם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2 + z^2$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכותבו אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משווה עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומיים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטו את D , החיתוך של W עם המישור $1 = y$ (במערכת צירים zx),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

[לפתרונות מלאים ראו את הסרטיונים באתר GooL.co.il](http://GooL.co.il)

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- 1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $z = 3$
 ב. $z = 4x^2 + 4y^2$
 ג. $x^2 + y^2 = 4$

- 2)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 ב. $2x + 3y + 4z = 1$
 ג. $x^2 = 16 - z^2$
 ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- 3)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשווהה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

- א. $r = 3$
 ב. $z = r^2$
 ג. $z = r$
 ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$
 ה. $r = 4 \sin \theta$
 ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\} . \text{א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \right\} . \text{ב.}$$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\} . \text{א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \right\} . \text{ב.}$$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} . \text{א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} . \text{ב.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} . \text{ג.}$$

$$U = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\} . \text{ד.}$$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z = r \cdot \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2 \cdot \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$. מערכת כדורית: שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2 \cdot \frac{2}{\sin \phi}$. מערכת כדורית: שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $9 = r^2 + z^2$. מערכת כדורית: $3 = r$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$. מערכת כדורית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $r = z \cdot \frac{\pi}{4}$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $x = y$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y-2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $(z-2)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

$$\text{א. } V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2 \right\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2} \right\}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2 \right\} . \text{א} \quad (7)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2 \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{א} \quad (8)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ג}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin\theta \right\} . \text{ד}$$

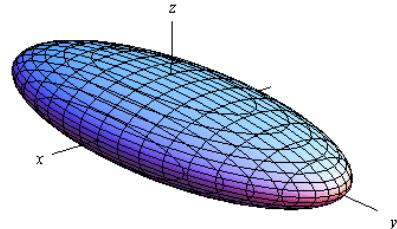
נספח – משטחים ממעלת שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$. אם נקבל בדור עם רדיוס a והחתכים הניל הם מעגלים.

אליפסואיד

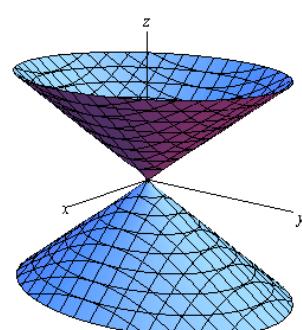


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

חרוט אליפטי

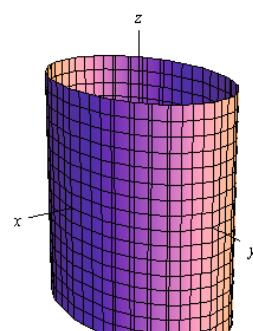


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו-
 zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הניל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

גליל אליפטי



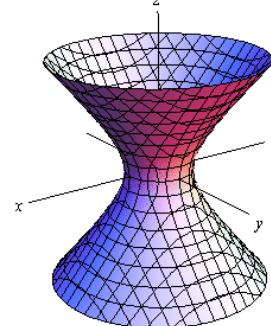
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד חד-יריעתי



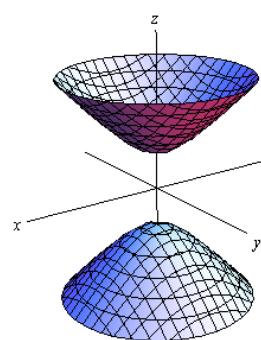
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

משוואה :

תיאור : למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

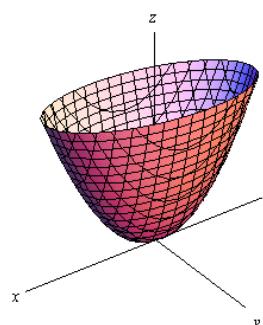
משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

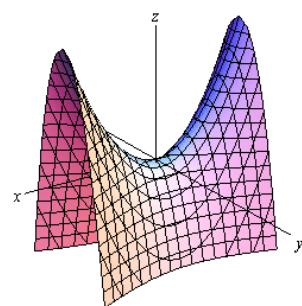
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך גם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

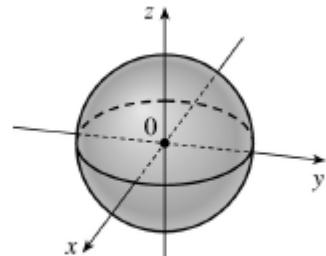
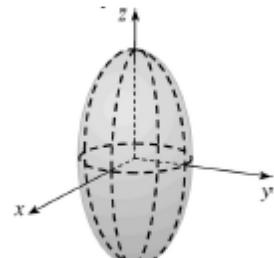
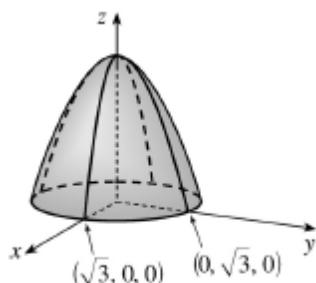
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשנתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



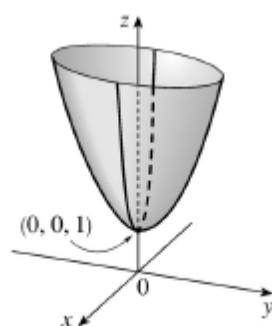
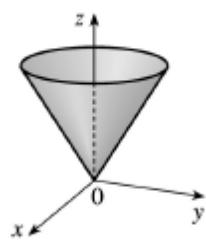
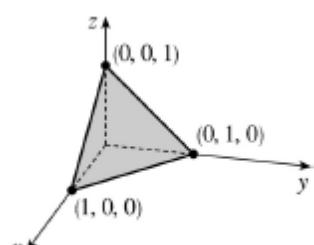
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 13 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים.....	111
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים.....	113
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים.....	115
4. נספח – משטחים ממולה שנייה.....	116

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- شرطו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$(u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}}) \quad (11)$$

$$(f(x, y) = \tan \frac{y}{x}) \quad (12)$$

$$(f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}) \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x-y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y-x^2, x+y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

14) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$

- شرطטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
ציררו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשפטים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שותות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים וشرطוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה וشرطו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה וشرطו אותו.

3) עברו כל אחת מהfonקציות הבאות למצאו את משטחי הרמה :

A. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
B. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

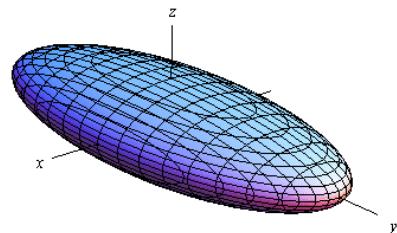
- 1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיווסה 2.
- 2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- 3) A. מישוריים.
B. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- 4) עברו $0 < k$ לא קיים משטח רמה k .
עבור $0 = k$ נקודה $(0, 0, 0)$. עברו $k = 1$ מישוריים.
עבור $1 > k$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
עבור $1 < k < 0$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
עבור $0 < k < 1$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $0 = k$ חרוט אליפטי.
עבור $0 < k$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משמעות: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$. אם
נקבל בדור עם רדיוס a והחתכים הנילם הם מעגלים.

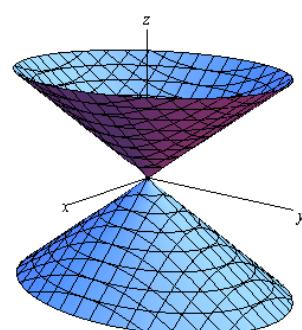
אליפסואיד



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים הנחたちים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

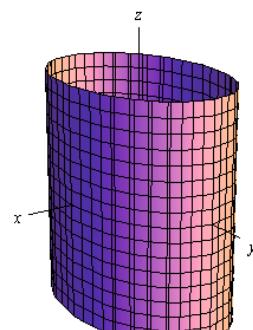
חרוט אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו-
 zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הנילם הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

גליל אליפטי



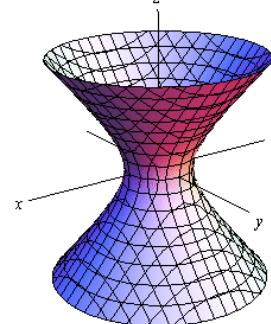
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואת :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid חד-יריעתי



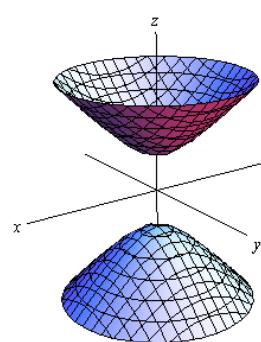
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

משוואת :

תיאור : למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid דו-יריעתי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

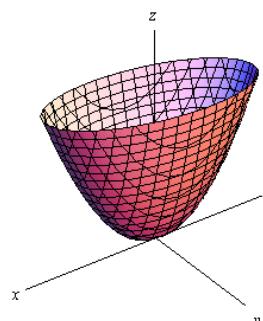
משוואת :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז הפרבולoid האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולoid נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולoid נפתח כלפימטה.

פרבולoid אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

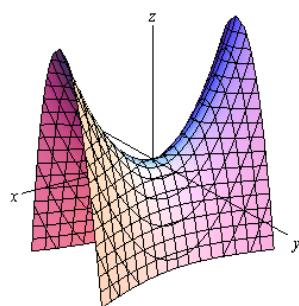
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך גם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

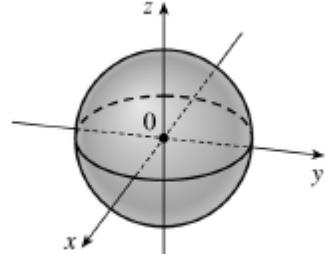
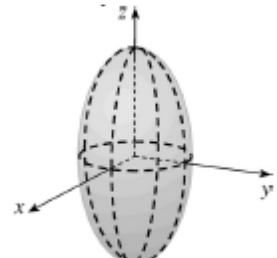
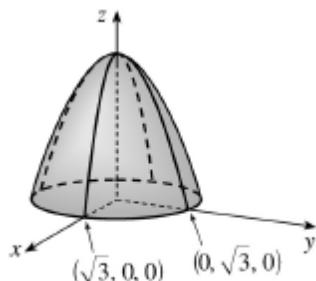
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



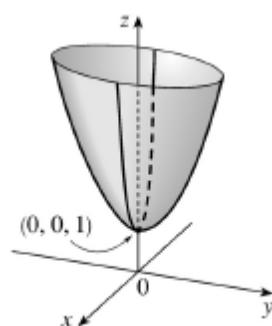
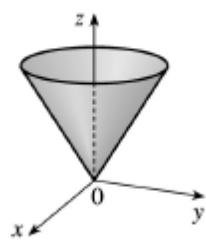
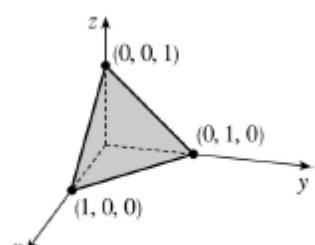
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 14 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים	119
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים.....	122
3. נוסחאות – גבולות.....	125

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2+y) \ln(x^2+y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 17-10 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 25-18 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20 ו-23-25 מומלץ לנסות לפתרור בשתי דרכי שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שיתכן שהגבול הידוע לא יינתן בוגר השאלה.

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

5) אין סוף.

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

17 – 20) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלוות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתיה רציפה בנקודה?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלוות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (6)$$

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f(x) = f$, שאינה פונקציה קבועה,

$$\cdot g(x,y) \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ונגידר פונקציה חדשה

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

$$\text{אם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) \text{ לכל } y,$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) \text{ לכל } x,$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ לכל (x,y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ k & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

11) נתון כי :

לכל x מתקיים $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq y_2 - y_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y) - f(x_1,y)| \leq x_2 - x_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו :

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

$$\cdot z(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ונגידר פונקציה חדשה

$$\text{ידעו כי } 0 < z(1,14) < 0, \quad z(14,1) > 0.$$

או בתחום ההגדרה של z קיימת נקודת (c_1, c_2) כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $1 > m$ הפונקציה רציפה, ועבור $1 \leq m$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

 $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$

$y = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{-\infty} = 0$

$\frac{1}{0^+} = \infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\frac{1}{\infty} = 0$

$y = e^x$

$e^{-\infty} = 0$

$e^0 = 1$

$e^\infty = \infty$

$y = \ln x$

 \dots

$\ln(0^+) = -\infty$

$\ln(\infty) = \infty$

$y = \arctan x$

$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\text{atan}(0) = 0$

$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$y = a^x, a > 1$

$a^{-\infty} = 0$

$a^0 = 1$

$a^\infty = \infty$

$y = a^x, 0 < a < 1$

$a^{-\infty} = \infty$

$a^0 = 1$

$a^\infty = 0$

$y = \sin x$

 \dots

$\sin 0 = 0$

 \dots

$y = \cos x$

 \dots

$\cos 0 = 1$

 \dots

$y = \frac{\sin x}{x}$

0

1

0

$y = \frac{\tan x}{x}$

 \dots

1

 \dots

$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

e

(from right)

1

e

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

 \dots

e

1

$y = \sqrt{x}$

 \dots

$\sqrt{0^+} = 0$

$\sqrt{\infty} = \infty$

$y = \sqrt[3]{x}$

 $-\infty$

$\sqrt[3]{0} = 0$

$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 15 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

126	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
128	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
132	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה.

נזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלוֹת 1-10 חשבו את הנזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad .(f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$. z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$. x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$. f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$. \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) \quad \text{חשבו}$$

הערת סימונו

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$ $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$ $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

נזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

16) חשבו $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

17) חשבו $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

18) נתנו $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$
 $\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$, f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y)$$

$$f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y)$$

$$f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0$$

$$f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x$$

$$f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

נגזרות חלקיות לפי ההגדלה

שאלות

$$1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.
- ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?
- ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$2) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$3) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$4) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

$$5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
- ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

$$6) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4) = f_{xyxyxyx}(1,4)$

הערה
תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

$$1) \text{ א. } 0 \quad \text{ב. לא רציפה בנקודה } (0,0) \quad f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$$

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

$$2) \quad f_x(0,0) = 1, f_y(0,0) = 0$$

$$3) \quad f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$$

$$4) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 0 \quad f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$$

$$5) \quad \text{ב. לא רציפות.} \quad f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$6) \quad \text{א. } f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 16 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

כל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון : $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשבו : z_u , z_v

2) נתון : $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשבו : z_t , z_m , z_k

3) נתון : $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכחו : $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

4) נתון : $z = f(xy)$
 הוכחו : $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

5) נתון : $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכחו : $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

6) נתון : $z = f(x-y, y-x)$
 הוכחו : $z_x + z_y = 0$

7) נתון : $w = f(x-y, y-z, z-x)$
 הוכחו : $w_x + w_y + w_z = 0$

8) נתון : $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
 הוכחו : $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{א.}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \quad \text{ב.}$$

ג. חשבו את $f'(0) = 2, g'(0) = 1$ אם ידוע ש- $u_{xy}(1, \pi) = 1$.

14) נתון: $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$

$$\text{א. הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

$$\text{ג. הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

15) נתון $z = h(u, v)$, $v = g(x, y)$, $u = f(x, y)$ מקיימות את משוואת

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

הוכחו כי:

א. v , u מקיימות את משוואת לפלאס.

$$\nu_{xx} + \nu_{yy} = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ וכן}$$

$$h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (\nu_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

16) נתון $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

17) פונקציה $f(x, y)$ תקרא הומוגנית מסדר n , אם

הוכחו כי אם f הומוגנית, אז:

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. חשבו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

$$\text{ב. נתון } x = 2t, y = t.$$

חשבו את $(0)' z$ באופן ישר.

$$\text{ג. נתון } t = 2x, y = x.$$

חשבו את $(0)' z$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוכנת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

-e ג. (13)

$$\text{א. } f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{ב. } \frac{4}{5} \quad \text{ג. } 0 \quad \text{ד. לא דיפרנציאבילית.} \quad (18)$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 17 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

138	1. פונקציות הומוגניות.
141	2. משפט אוילר.

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאייזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

4) נתון כי $z = f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.
במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמיטו ממנה חלק,
כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2. \quad 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x+y}. \quad 2$$

ב. הוכחו את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $(g(t))$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$

$$\text{הקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

7) תהינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאם.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאייה דרגה:

$$f+g \quad \text{. א.} \quad \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{. ב.} \quad \frac{f}{g} \quad \text{. ג.} \quad f \cdot g \quad \text{. ד.}$$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, f_x(1, 2) = ?$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4, 10) = 1$.

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

תשובות סופיות

(1) הומוגנית מסדר 3.5.

(2) הומוגנית מסדר 1.

(3) הומוגנית מסדר 1.

(4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר 3.}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר 2.}$$

$$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר 0.}$$

(5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.

$$g(t) = \sqrt{1+t} \quad .2 \quad g(t) = 1-t+2t^2 \quad .1. \quad \text{ב. הוכחה.}$$

(6) א. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$.

$$\text{ג. הומוגנית מדרגה } .2r_1 - \frac{r_2}{n}$$

ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.

$$f_x(2, 4) = 80, \quad f_x(1.5, 3) = 33.75, \quad , f(2, 4) = 64, \quad f(0.5, 1) = \frac{1}{4} \quad (8)$$

$$f_x(a, a) = 4a^3 \quad \text{ב.} \quad f(2, 5) = \frac{1}{16} \quad \text{א.} \quad (9)$$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
- ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $f(x, y) = f(y)$ הומוגנית מסדר 0.

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\cdot f(x, y) = \frac{e^y (x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot f_x = -y \cdot f_y$$

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

- ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

- ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $1 = u_x(2, 2) + u_y(1, 1)$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

$$\cdot h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

- א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

- ב. נתון : $f(8, 1) = 16$, $h_x(6, 3) = 9$

- מצאו את $h_y(2, 1)$ ואת $h(2, 1)$

5) f ו- g הין פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאם. נגידיר:

$$f(x, y) = (x+y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $f'_x(2, 16) = 12$, $f'_y(1, 8) = 3$, $h(4, 32) = 16$

מצאו את $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

$$\text{נגידיר פונקציה } p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$$

נתון: $f'_x(2, 4) = 64$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $p(1, 2) = \frac{7}{2}$

חשבו את $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בشرطוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$

ג. נגידיר פונקציה חדשה $u(x, y)$

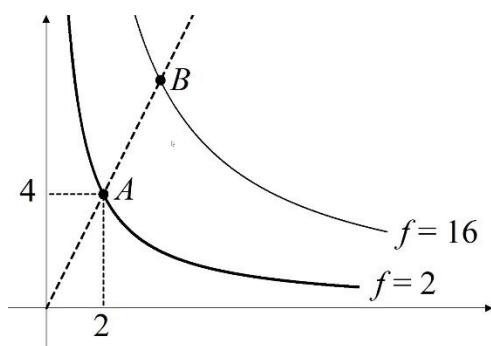
$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$

הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$

היעזרו בסעיף הקודם ובנתונים על f



8) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$\text{המקיימת } f(2,1) = 27 \text{ ו- } f(6,3) = 243.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברתعش"ע של f .

העבירות משיק לעש"ע בנקודה הניל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

מצאו את $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$, $f_x(1,0.5)$

9) תהי $(t) g$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע, כי $g(4) = 5$, $g(1) = 3$, $g'(8) = 2$

$$\text{המשתנה } t \text{ תלוי במשתנים החזיביים } (x, y), \text{ כך: } t = \frac{4y}{x}.$$

נגידר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באյור שלහלן קרו עם שיפוע 1.

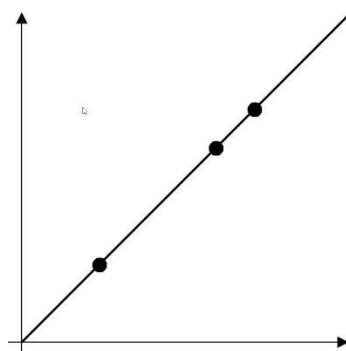
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרכן?

ב. הוכחו כי $\frac{\partial u}{\partial x}(0, -4) = -1$ היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרכן הזאת ורשמו באյור מה הערך של התועלת.

ג. הוכחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכחו כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, 2) = -16$.



10) נניח ש- $f(x, y) = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכחו כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

11) הוכחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.
 ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$, אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $h_y(2,1) = 8$ $h(2,1) = 4$

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $f(1,8) = 9$, $g(1,8) = 0$

(6) $-\frac{3}{4}$

(7) א. $B(4,8)$. ב. 12. ג. שאלת הוכחה והסביר.

(8) א. 2. ב. $f_x(1,0.5) = \frac{54}{7}$. $f_y(2,1) = \frac{3}{2} \left(\frac{108}{7} \right)$.

(9) א. 5. ב-ד. שאלות הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 18 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

- 145 1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהfonקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קרייטיות וסוווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המשוררים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפchan 32 סמ"ק, חשבו את ממדיו התיבה שטוח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $z = -2x - 2y + z = 0$ וכן את הנקודה על המישור הקרוב ביותר לנוקודה הנ"ל.

- (12)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$ 6 ועלות הייצור מחשבון בסין היא \$.8.
 מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $P_1 = P_2$.
 כיצד צריכה הchnerה לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רוחח זה?

- (13)** נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודת קרייטית.
 - בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

- (14)** מצאו שני מספרים, $a > b$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- (1)** אוכף ; $(-0.5, 1)$ מינימום.
(2) מינימום ; $(1, -2)$, $(-1, 2)$; $(-1, -2)$ אוכף.
(3) אוכף ; $(0, 0)$ מינימום.
(4) אוכף. $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$; $(0, 1)$ מינימום ; $(-1, 1), (-1, -1)$ אוכף.
(5) מקסימום.
(6) מקסימום.
(7) מקסימום.
(8) אין נקודות קרייטיות.
(9) $z = 4$, $z = 3$
(10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
(11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3)$.
(12) $P_1 = 10\$, P_2 = 12\$$ רוחח מקסימלי \$ 288\$.
(13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, $a < -2$, $a > 2$, לא ניתן לדעת;
 אוכף ; $a < -2$ – מינימום.
(14) $a = -6$, $b = 4$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 19 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים
הפחותתיים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים

147

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתוך) – ריבועיםՓחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 + 1$, לפרבולה $x = -y^2$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומי (מקורב) של משווה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$\cdot (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + b \quad (7)$$

$$\cdot (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + bx \quad (8)$$

$$\cdot (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (9)$$

$$\cdot (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} \quad (10)$$

. $(1,4.5), (0.5,2.3), (0,0.8), (-1,0.1), (-0.5,0.12)$, הדגימו עבור $h(x) = ax^2 + bx + c$ (11)

12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.
 מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכדים בין הימש
 והנקודות יהיה מינימלי.
 יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתפללים מפתרון המשוואות $f_a = 0$, $f_b = 0$,
 נוותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכדים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

תשובות סופיות

1) לכל t ממשי, מקסימום.

2) מקסימום.

3) אין קיצון. (1,2) אוכף.

4) אין קיצון. (1,2) אוכף.

5) מינימום.

6) 0.375

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (7)$$

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (8)$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (9)$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (10)$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (11)$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 20 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ

149

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y > 0} \{xy\}$ s.t. $x + 3y = 12$, כאשר $x, y > 0$

- א. פתרו את הבעיה.
- ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y \geq 0} \{2x + y\}$ s.t. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

- א. פתרו את הבעיה.
- ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחxon מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחxon מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז : מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10) מושילה קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצricaת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מושילה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת 16,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימלית.
 נסחו ופתרו את בעיית מושילה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצricaת הסל (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מגנו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $y = 4x + 6$.
 דני מחפש את הסל $(\text{אננס, מגנו}) = (x, y)$, על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצricaת מגנו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.
 הייצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית הייצרן (לא לפתרור).

14) נתונה בעיית קייזון תחת אילוץ $p_1x + p_2y = I$.
 תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב כללי של השקעה.
 הוכיחו כי כופל לגראנזי λ מקיים $\frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I} = \lambda$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

(14) שאלת הוכחה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 21 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 152

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- 1)** מבין כל התוצאות הפתוחות שנפחו 32 סמ"ק, חשבו את ממדיו התיבה ששתה הפנים שלה הוא מינימלי.
- 2)** מצאו על פני הcéדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$.
- 3)** ענו על השעיפים הבאים :
- מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 - מצאו נקודה על המישור $z = 2x - 2y$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.
 - בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- 4)** מצאו את הנקודות על המשטח $xy + 1 = z^2$ הקרובות ביותר לראשית.
- 5)** מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז : מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- 6)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකל מחתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $x + y + z = 0$ לבין ראשית הצירים.
- 7)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකל מחתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $x + y + z = 0$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בעוויות מעשיות. ישנן דרכי מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 22 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5), (3,0), (0,0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0), (2,2), (0,2), (0,0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $. R = \{(x,y) | x+y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $. R = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $10\sqrt{6} + 1$. מינימום מוחלט $10\sqrt{6} - 1$.